Sol jun06:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot (2C - D) = E$$

$$(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix}$$

$$2x1 \ . \ 1x2$$

$$(2C - D) = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3m \\ x + m \end{pmatrix}$$

$$2x2 \ . \ 2x1$$

$$\begin{pmatrix} 3x + 3m \\ x + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 - m \\ 3 & m & 5 - m \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 - m \\ 3 & m & 5 - m \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3m - 3 = 0 \rightarrow m = 1$$

Para $m \neq 1$ $\quad RgA = 2 = RgB \quad S.C.D.$

Para $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$RgA = 1, RgB = 2 \quad S.I.$$

Para m=4

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y = 1 \quad 3x + y = -2, x = -1$$

Calcular la matriz inversa por dos métodos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Lo primero que hay que hacer es que donde esta a tiene que haber un 1.

Luego dividimos toda la fila por a.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos la 1ª por (-c) y sumamos a la 2ª

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Ahora dividimos la 2ª fila por (*) para que quede un 1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos la 2ª por (-*) y sumamos a la 1ª.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

EJ:

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Primero dividir la 1ª fila entre 2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Segundo paso, multiplicar la 1ª por (-1) y sumar a la 2ª

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la 2ª por(-2/3)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la 2ª por (1/2) y sumamos a la 1ª.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/6 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (10 Puntos) En el ejercicio siguiente

- [5 puntos] Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.
- [5 puntos] Calcular la matriz inversa resolviendo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Primero dividir la 1ª fila entre (-1).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Segundo paso, multiplicar la 1ª por (-1) y sumar a la 2ª

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividimos la 2ª por(3)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la 2ª por (2) y sumamos a la 1ª.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = I \qquad B \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3} \quad z = \frac{1}{3} \quad t = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (10 puntos) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.

a) [6 puntos] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?

b) [4 puntos] Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

$$\begin{cases} x - \ caramelos \\ y - \ gominolas \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 200 \\ x = my \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 200 \\ 1 & -m & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 2 & 100 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 1 & 2 & 100 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + m = 0 \quad \rightarrow m = -2$$

$$Si\ m \neq 2 \ \ RgA = RgB = 2 \ \ S.C.D.$$

$$Si\ m = 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{array}\right) \quad RgA = 1, RgB = 2 \ I.$$

$$m = 3 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 100 \end{array}\right)$$

$$y = \frac{100}{5} = 20\,, \quad x - 3y = 0 \quad x = 3y = 3 \cdot 20 = 60$$

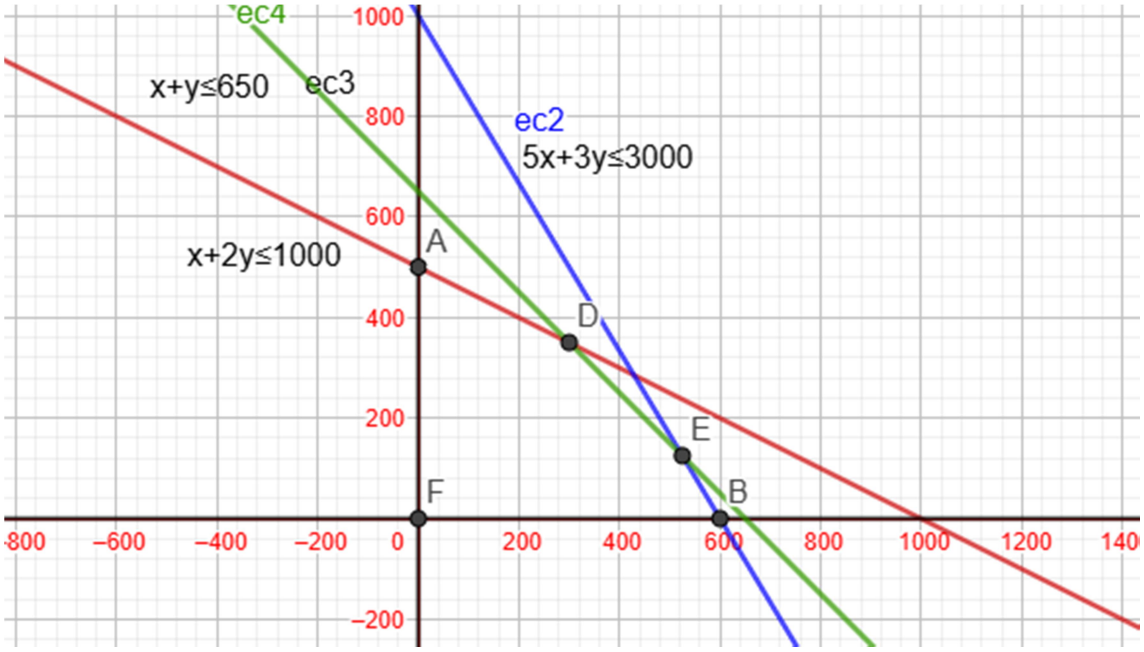
Ejercicio 1 (10 puntos) Una empresa fabrica únicamente tapas y envases. Cada lote de tapas requiere de 1 litro de barniz y 5 minutos en el horno, mientras que cada lote de envases requiere de 2 litros de barniz y 3 minutos en el horno. Semanalmente se dispone de 1000 litros de barniz y 3000 minutos de horno. Por restricciones de su infraestructura, la producción semanal entre los dos productos es, como mucho, de 650 lotes.

a) (7 puntos) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede fabricar la empresa cada semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si la empresa fabricase 200 lotes de tapas y 100 lotes de envases?

b) (3 puntos) Si la empresa vende todo lo que fabrica y gana por cada lote de tapas fabricado 3000 euros y por cada lote de envases 4000 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo deberá fabricar para maximizar sus ganancias?

$$\begin{cases} x - tapas \\ y - envases \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 1000 \\ 5x + 3y \leq 3000 \\ x + y \leq 650 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$A(0,500)\quad D(300,350)\quad E(525,125)\quad B(600,0)\quad F(0,0)$$

Si

$$z = 3000x + 4000y$$

$$Z_D = 2300000$$

$$Z_E = 2075000$$

(300,350) beneficio máximo

Ejercicio 2 (10 puntos) Una granja produce dos tipos de alimento para ganado: A y B. El alimento A requiere 1 hora de mezcla y 2 horas de envasado, mientras que el alimento B necesita 3 horas de mezcla y 1 hora de envasado. La granja dispone de 60 horas semanales para mezcla y 40 horas para envasado. Además, la cantidad de alimento A producida no debe ser mayor que el doble de la cantidad de alimento B producida. La ganancia es de 5 € por cada unidad de alimento A y de 8 € por cada unidad de alimento B.

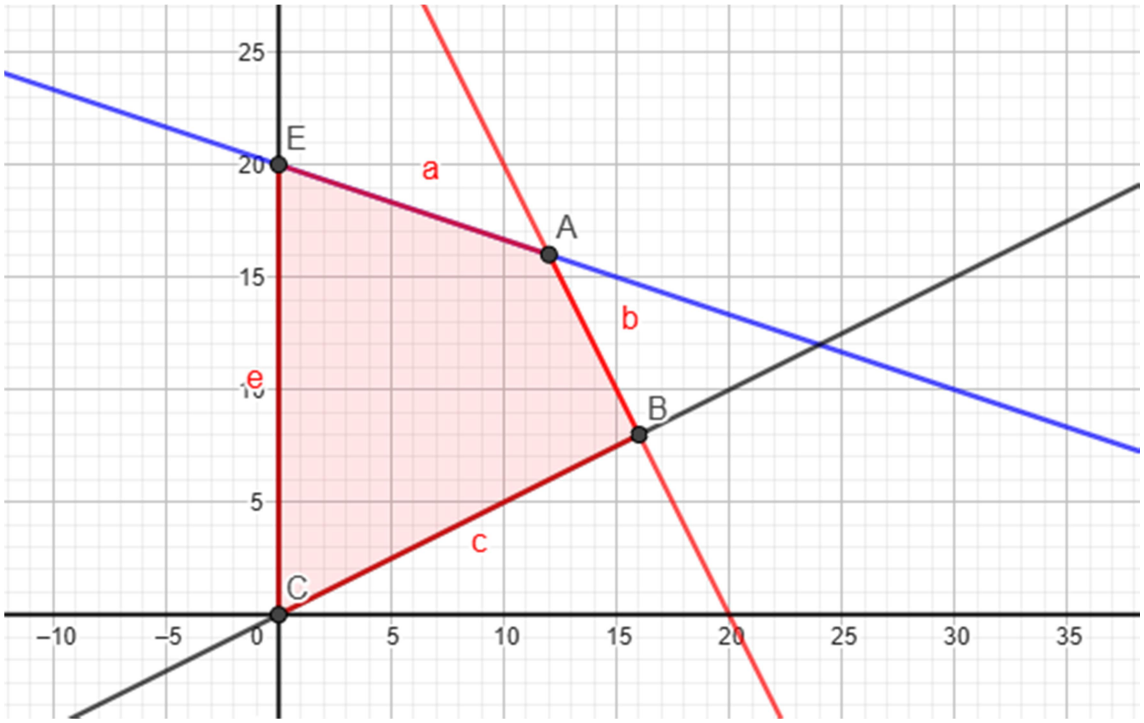
a) (6 puntos) Representa la región factible y encuetra los los vértices de dicha región.

b) (4 puntos) Determinar el beneficio óptimo.

$$\begin{cases} alimento\ A \rightarrow X \\ alimento\ B \rightarrow y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \leq 40 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$beneficio\ z = 5x + 8y$$



$$C(0,0)\ , B(16,8)\ , A(12,16), E(0,20)$$

$$Z_A = 5 \cdot 12 + 8 \cdot 16 = 188$$
$$Z_B = 5 \cdot 16 + 8 \cdot 8 = 144$$
$$Z_E = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 20 = 160$$

Ejercicio 1. (10 Puntos) Resolver la siguiente ecuación matricial explicando todos los pasos que hagas para despejar la icógnita en:

$$BXA = BA + C$$

siendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. (10 Puntos) En el ejercicio siguiente

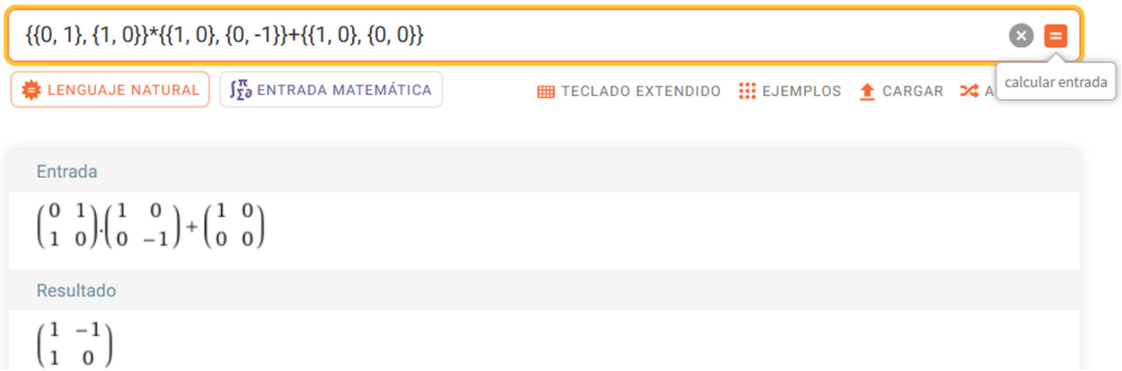
- [5 puntos] Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.
- [5 puntos] Calcular la matriz inversa resolviendo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$

1)

$$BXA = BA + C = D$$

$$\boldsymbol{D} = BA + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

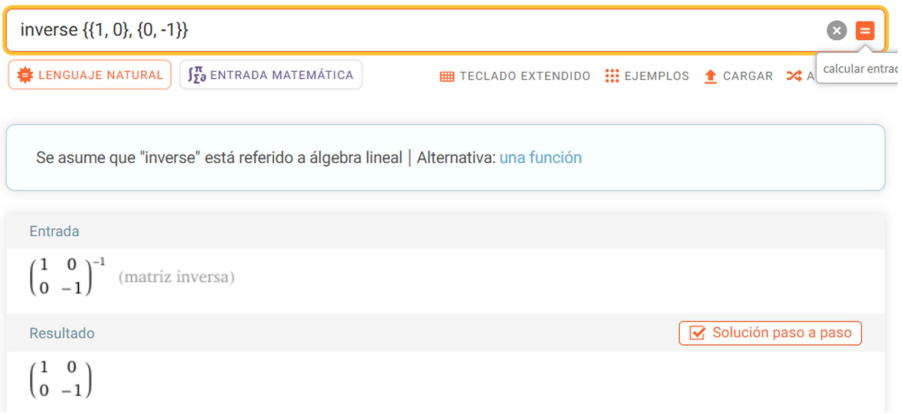
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



$$\cancel{B^{-1} \cdot B} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot D \cdot A^{-1}$$
$$X \cdot \cancel{A \cdot A^{-1}} = B^{-1} \cdot D \cdot A^{-1}$$
$$\boldsymbol{X = B^{-1} \cdot D \cdot A^{-1}}$$

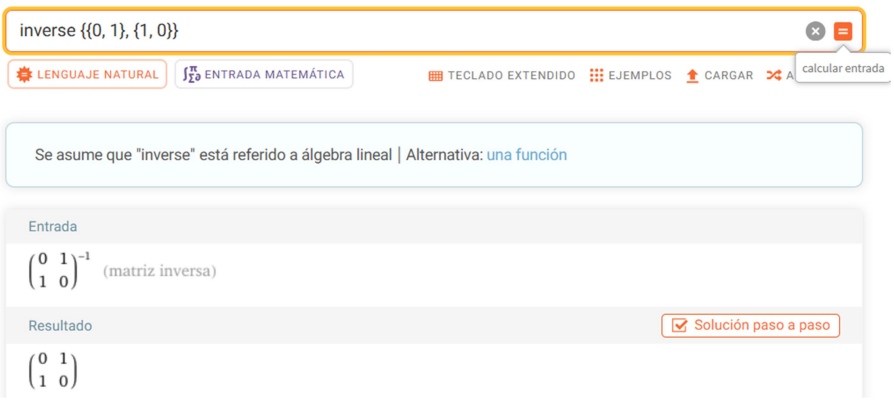
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, |A| = -1 \quad , AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (AdjA)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$



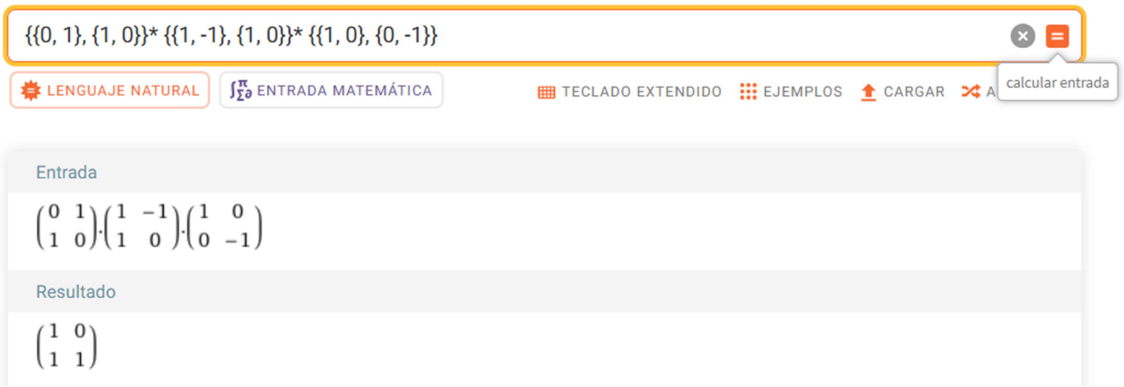
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |B| = -1 \quad , AdjB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (AdjB)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$



$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$



2)

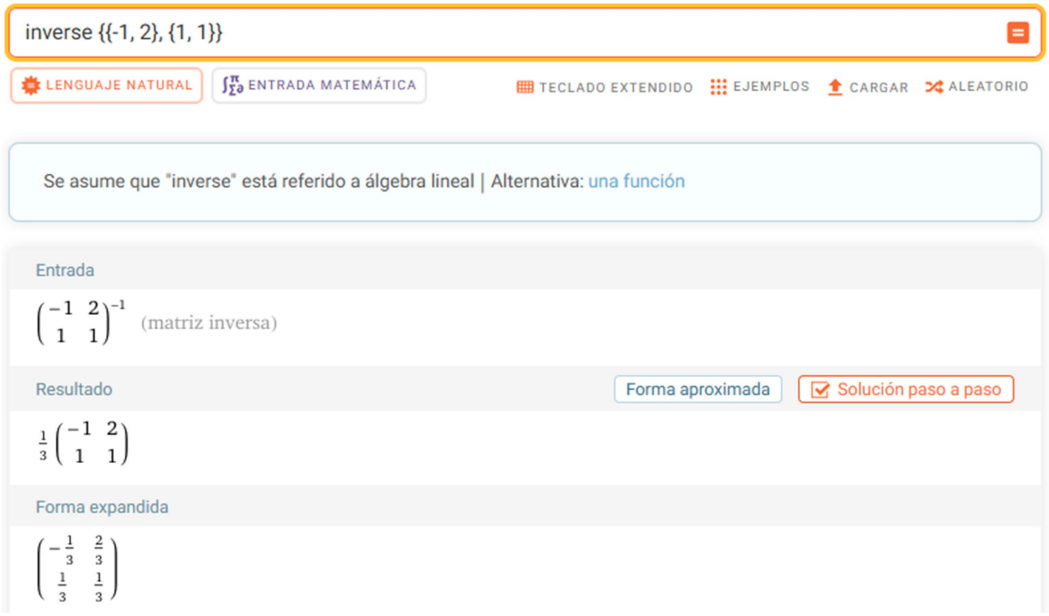
Ejercicio 2. (10 Puntos) En el ejercicio siguiente

- [5 puntos] Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.
- [5 puntos] Calcular la matriz inversa resolviendo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/3} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$



b)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C$$

Tenemos que calcular A

$$A \cdot \cancel{B \cdot B^{-1}} = C \cdot B^{-1}$$

$$\boldsymbol{A = C \cdot B^{-1}}$$

$$\boldsymbol{|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \, , AdjB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \, , (AdjB)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3} \, , \quad y = \frac{2}{3} \, , \quad z = \frac{1}{3} \, , t = \frac{1}{3}}$$